गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र II / Paper II

निर्धारित समय : तीन घंटे	अधिकतम अंक : 250
Time Allowed : Three Hours	*Maximum Marks : 250*

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें आठ प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा हिन्दी और अंग्रेज़ी दोनों में छपे हुए हैं।

परीक्षार्थी को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer (QCA) Booklet must be clearly struck off.

IMS (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

खण्ड A

SECTION A

Q1. (a) मान लीजिए कि कोटि mn का एक परिमित समूह G है, जहाँ m और n, (m > n) अभाज्य संख्याएँ हैं । दर्शाइए कि G का कोटि m का अधिक-से-अधिक एक उपसमूह है ।

Let G be a finite group of order mn, where m and n are prime numbers with m > n. Show that G has at most one subgroup of order m. *10*

(b) यदि $w = f(z)$, z का एक विश्लेषिक फलन है, तब दर्शाइए कि

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \log |f'(z)| = 0 \quad \text{है ।}$$

If $w = f(z)$ is an analytic function of z, then show that

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \log |f'(z)| = 0.$$

10

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{(2-x)}}\,dx$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए ।

Test the convergence of $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{(2-x)}}\,dx$. *10*

(d) यदि x तथा y के फलन ϕ और ψ लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं, तो दर्शाइए कि $f(z) = p + iq$, $i = \sqrt{-1}$ एक विश्लेषिक फलन है, जहाँ $p = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ तथा $q = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ है ।

If ϕ and ψ are functions of x and y satisfying Laplace equation, then show that $f(z) = p + iq$, $i = \sqrt{-1}$ is an analytic function, where $p = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ and $q = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$. *10*

IMS (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

(c) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने के लिए द्विचरण विधि का उपयोग कीजिए :

अधिकतमीकरण कीजिए $z = x_1 + 2x_2$

बशर्ते कि
$$x_1 - x_2 \geq 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Use two phase method to solve the following linear programming problem : 10

Maximize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$x_1 - x_2 \geq 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Q2. (a) कौशी के अभिसरण के व्यापक (जनरल) सिद्धांत का उपयोग करते हुए, अनुक्रम $< f_n >$ के अभिसरण की जाँच कीजिए, जहाँ $f_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

Using Cauchy's general principle of convergence, examine the convergence of the sequence $< f_n >$, where $f_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. 15

(b) दर्शाइए कि एक आबेली समूह का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब आबेली है, लेकिन इसका विपरीत आवश्यक रूप से सत्य नहीं है ।

Show that every homomorphic image of an abelian group is abelian, but the converse is not necessarily true. 15

(c) वह फलन ज्ञात कीजिए जो कि वृत्त $C : z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, के अन्दर तथा उसके ऊपर विश्लेषिक है और C की परिधि पर जिसका मान $\frac{(a^2-1)\cos\theta + i(a^2+1)\sin\theta}{a^4 - 2a^2\cos 2\theta + 1}$ है, जहाँ $a^2 > 1$ है ।

Find the function which is analytic inside and on the circle $C : z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and has the value $\frac{(a^2-1)\cos\theta + i(a^2+1)\sin\theta}{a^4 - 2a^2\cos 2\theta + 1}$ on the circumference of C, where $a^2 > 1$. 20

IMS TM (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

Q3. (a) फलन $f(z) = \dfrac{1}{z(\sin \pi z)\left(z + \frac{1}{2}\right)}$ के अनंतक तथा उनकी घात (ऑर्डर) का पता लगाइए ।

इन अनंतकों पर f(z) के अवशेष भी ज्ञात कीजिए ।

Locate the poles and their order for the function $f(z) = \dfrac{1}{z(\sin \pi z)\left(z + \frac{1}{2}\right)}$.

Also, find the residue of f(z) at these poles. *15*

(b) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, $0 \le x \le 1$ का विचार कीजिए, जिसके पहले n पदों का योगफल $S_n(x) = \dfrac{1}{2n^2} \log(1 + n^4x^2)$, $x \in [0, 1]$ के द्वारा दिया गया है । दर्शाइए कि दी गई श्रेणी को पद-दर-पद अवकलित किया जा सकता है, यद्यपि $\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$, [0, 1] पर एकसमान अभिसरित नहीं होती है ।

Consider the series $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, $0 \le x \le 1$, the sum of whose first n terms is given by $S_n(x) = \dfrac{1}{2n^2} \log(1 + n^4x^2)$, $x \in [0, 1]$. Show that the given series can be differentiated term-by-term, though $\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$, does not converge uniformly on [0, 1]. *20*

(c) द्वैत सिद्धांत का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

न्यूनतमीकरण कीजिए $z = 4x_1 + 3x_2 + x_3$

बशर्ते कि

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Using duality principle, solve the following linear programming problem : *15*

Minimize $z = 4x_1 + 3x_2 + x_3$

subject to

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

IMS (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

1. (a) पूर्णांकों के वलय Z पर बहुपद वलय Z[x] का विचार कीजिए । मान लीजिए x द्वारा जनित Z[x] की एक गुणजावली S है । दर्शाइए कि S, Z[x] की एक अभाज्य गुणजावली है लेकिन उच्चिष्ठ गुणजावली नहीं है ।

Consider the polynomial ring Z[x] over the ring Z of integers. Let S be an ideal of Z[x] generated by x. Show that S is prime but not a maximal ideal of Z[x]. *15*

(b) [0, 1] पर परिभाषित निम्नलिखित फलन f के लिए उपरि तथा निम्न रीमान समाकल ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{1/2}, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है ।} \\ (1-x), & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है ।} \end{cases}$$

अत: दर्शाइए कि [0, 1] पर f रीमान समाकलनीय नहीं है ।

Find the upper and lower Riemann integrals for the function f defined on [0, 1] as follows :

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{1/2}, & \text{if } x \text{ is rational.} \\ (1-x), & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

Hence, show that f is not Riemann integrable on [0, 1]. *15*

(c) एक कंपनी का कार्मिक प्रबंधक, अधिकारियों A, B और C को क्षेत्रीय कार्यालयों दिल्ली, मुंबई, कोलकाता और चेन्नई में नियुक्त करना चाहता है । चार क्षेत्रीय कार्यालयों में इन तीन अधिकारियों के स्थानांतरण की लागत (हजार रुपयों में) नीचे दी गई है :

	कार्यालय			
अधिकारी	दिल्ली	मुंबई	कोलकाता	चेन्नई
A	16	22	24	20
B	10	32	26	16
C	10	20	46	30

वह नियतन (असाइनमेन्ट) ज्ञात कीजिए, जो स्थानांतरण की कुल लागत को न्यूनतम करता है और न्यूनतम लागत भी निर्धारित कीजिए ।

IMS™ (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

The personnel manager of a company wants to assign officers A, B and C to the regional offices at Delhi, Mumbai, Kolkata and Chennai. The cost of relocation (in thousand Rupees) of the three officers at the four regional offices are given below :

	Office			
Officer	Delhi	Mumbai	Kolkata	Chennai
A	16	22	24	20
B	10	32	26	16
C	10	20	46	30

Find the assignment which minimizes the total cost of relocation and also determine the minimum cost. *20*

IMS (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

खण्ड B

SECTION B

Q5. (a) दर्शाइए कि यदि f और g उनके संबंधित स्वतंत्र चरों के स्वेच्छ फलन हैं, तब $u = f(x - kt + i\alpha y) + g(x - kt - i\alpha y)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ जहाँ } \alpha^2 = 1 - \frac{k^2}{C^2} \text{ है,}$$

का एक हल है ।

Show that if f and g are arbitrary functions of their respective arguments, then $u = f(x - kt + i\alpha y) + g(x - kt - i\alpha y)$, is a solution of

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ where } \alpha^2 = 1 - \frac{k^2}{C^2}.$$ *10*

(b) गाउस-जॉर्डन विधि द्वारा निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$2x + 3y - z = 5$
$4x + 4y - 3z = 3$
$2x - 3y + 2z = 2$

Solve the following system of linear equations by Gauss-Jordan method : *10*

$2x + 3y - z = 5$
$4x + 4y - 3z = 3$
$2x - 3y + 2z = 2$

(c) (i) $(8D)_{16}$ और $(FF)_{16}$ के सचिह्न परिमाण रूप में दशमलव समतुल्य ज्ञात कीजिए ।

(ii) $(9B2.1A)_{16}$ का दशमलव समतुल्य ज्ञात कीजिए ।

(i) Determine the decimal equivalent in sign magnitude form of $(8D)_{16}$ and $(FF)_{16}$.

(ii) Determine the decimal equivalent of $(9B2.1A)_{16}$. *10*

(d) द्रव्यमान m तथा लम्बाई 2a का एक खुरदुरा एकसमान बोर्ड एक चिकने क्षैतिज तल पर रखा है और M द्रव्यमान का एक व्यक्ति उस पर एक छोर से दूसरे छोर तक चलता है । इस दौरान बोर्ड द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए ।

A rough uniform board of mass m and length 2a rests on a smooth horizontal plane and a man of mass M walks on it from one end to the other. Find the distance covered by the board during this time. *10*

(e) एक प्रवाह का वेग विभव ϕ,

$$\phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

के द्वारा दिया गया है । धारा रेखाएँ ज्ञात कीजिए ।

The velocity potential ϕ of a flow is given by

$$\phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Determine the streamlines. 10

Q6. (a) दर्शाइए कि द्विविम लाप्लास समीकरण

$$\frac{\partial^2\phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), y \geq 0$$

का हल, परिसीमा प्रतिबन्ध

$\phi(x, 0) = f(x), x \in (-\infty, \infty)$ के अधीन तथा $\phi(x, y) \to 0$

जब $|x| \to \infty$ और $y \to \infty$,

$$\phi(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)\, d\xi}{y^2 + (x - \xi)^2}$$

के रूप में लिखा जा सकता है ।

Show that the solution of the two-dimensional Laplace's equation

$$\frac{\partial^2\phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), y \geq 0$$

subject to the boundary condition

$\phi(x, 0) = f(x), x \in (-\infty, \infty)$,

along with $\phi(x, y) \to 0$ for $|x| \to \infty$ and $y \to \infty$ can be written in the form

$$\phi(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)\, d\xi}{y^2 + (x - \xi)^2}.$$ 20

(b) बूलीय व्यंजक $Y = AB\bar{C} + B\bar{C} + \bar{A}B$ के लिए तर्कसंगत परिपथ (लॉजिकल सर्किट) खींचिए । तीन निवेश द्वयंक अनुक्रमों

A = 10001111, B = 00111100, C = 11000100

के लिए निर्गत Y (सत्यमान सारणी) भी प्राप्त कीजिए ।

Draw the logical circuit for the Boolean expression

$Y = AB\bar{C} + B\bar{C} + \bar{A}B$. Also, obtain the output Y (truth table) for the three input bit sequences :

A = 10001111, B = 00111100, C = 11000100 15

IMS TM (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

(c) दीर्घवृत्तीय डिस्क $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, के एक चतुर्थांश, जिसका द्रव्यमान M है, का उसके तल के लंबवत तथा उसके केन्द्र से गुज़रने वाली रेखा के सापेक्ष, जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए। दिया गया है कि किसी भी बिन्दु पर घनत्व xy के समानुपाती है।

Find the moment of inertia of a quadrant of an elliptic disk $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, of mass M about the line passing through its centre and perpendicular to its plane. Given that the density at any point is proportional to xy. 15

Q7. (a) निम्नलिखित रैखिक-कल्प समीकरण

$$(y - \phi)\frac{\partial \phi}{\partial x} + (\phi - x)\frac{\partial \phi}{\partial y} = x - y,$$

का वह समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए, जो कि वक्र $\phi = 0$, $xy = 1$ और वृत्त $x + y + \phi = 0$, $x^2 + y^2 + \phi^2 = a^2$ से होकर गुज़रता है।

Find the integral surface of the following quasi-linear equation

$$(y - \phi)\frac{\partial \phi}{\partial x} + (\phi - x)\frac{\partial \phi}{\partial y} = x - y,$$

which passes through the curve $\phi = 0$, $xy = 1$ and through the circle $x + y + \phi = 0$, $x^2 + y^2 + \phi^2 = a^2$. 15

(b) (i) चौड़ाई $h = 1$ के साथ सिम्पसन के $\frac{3}{8}$ नियम, और

(ii) चौड़ाई $h = 1$ के साथ समलंबी (ट्रैपिज़ॉइडल) नियम

का उपयोग करके $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ का $x = -2$ से $x = 4$ तक समाकलन कीजिए।

Integrate $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ from $x = -2$ to $x = 4$ using

(i) Simpson's $\frac{3}{8}$ rule with width $h = 1$, and

(ii) Trapezoidal rule with width $h = 1$. 15

IMS™ (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

(c) मान लीजिए कि वेग क्षेत्र

$$u(x, y) = \frac{B(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad v(x, y) = \frac{2Bxy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad w(x, y) = 0,$$

जहाँ B एक अचर है, अश्यान असंपीड्य प्रवाह के लिए गति समीकरणों को संतुष्ट करता है । इस वेग क्षेत्र से सहचारी (एसोसिएटेड) दाब का निर्धारण कीजिए ।

Let the velocity field

$$u(x, y) = \frac{B(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad v(x, y) = \frac{2Bxy}{(x^2 \div y^2)^2}, \qquad w(x, y) = 0$$

satisfy the equations of motion for inviscid incompressible flow, where B is a constant. Determine the pressure associated with this velocity field. *20*

Q8. (a) आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi\right) + 2x^2y\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi\right) = 0$$

को विहित रूप में रूपांतरित करके हल कीजिए ।

Solve the partial differential equation

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi\right) + 2x^2y\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi\right) = 0$$

by transforming it to the canonical form. *15*

(b) अंतर्वेशन के लिए न्यूटन के अग्रांतर सूत्र का उपयोग करके निम्नलिखित आँकड़ों से f(2·5) के मान का आकलन कीजिए :

x :	1	2	3	4	5	6
f(x) :	0	1	8	27	64	125

Using Newton's forward difference formula for interpolation, estimate the value of f(2·5) from the following data : *15*

x :	1	2	3	4	5	6
f(x) :	0	1	8	27	64	125

IMS (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES) TM

(c) मान लीजिए कि एक अनंत द्रव में दो समानांतर, समान तथा विपरीत सरलरेखीय भ्रमिल 2a की दूरी पर हैं । दर्शाइए कि भ्रमिल के सापेक्ष धारा रेखाएँ समीकरण

$$\log \frac{x^2 + (y - a)^2}{x^2 + (y - a)^2} + \frac{y}{a} = C$$

द्वारा दी गई हैं, जहाँ C एक अचर है, मूल-बिंदु जुड़ाव का मध्य बिंदु है, और भ्रमिलों को जोड़ने वाली रेखा y का अक्ष है ।

Suppose an infinite liquid contains two parallel, equal and opposite rectilinear vortices at a distance 2a. Show that the streamlines relative to the vortex are given by the equation

$$\log \frac{x^2 + (y - a)^2}{x^2 + (y + a)^2} + \frac{y}{a} = C,$$

where C is a constant, the origin is the middle point of the join, and the line joining the vortices is the axis of y. 20