खण्ड—A / SECTION—A

1. *(a)* मान लीजिए कोटि 10 का एक समूह G है तथा कोटि 6 का एक समूह G' है। जाँच कीजिए कि क्या G से G' पर एक आच्छादक समाकारिता का अस्तित्व है।

Let G be a group of order 10 and G' be a group of order 6. Examine whether there exists a homomorphism of G onto G'. 10

(b) गुणजावली $4Z+6Z$ को पूर्णांकीय प्रांत Z में एक मुख्य गुणजावली के रूप में व्यक्त कीजिए।

Express the ideal $4Z+6Z$ as a principal ideal in the integral domain Z. 10

(c) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, $x>0$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad x>0$$

10

(d) एक फलन $f(z)=f(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)$ के इसके प्रांत में विश्लेषिक होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए। तब दर्शाइए कि $f(z)=\log z$ अपने प्रांत में विश्लेषिक है तथा $\frac{df}{dz}$ ज्ञात कीजिए।

State the sufficient conditions for a function $f(z)=f(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)$ to be analytic in its domain. Hence, show that $f(z)=\log z$ is analytic in its domain and find $\frac{df}{dz}$. 10

(e) एक व्यक्ति को अपने उद्यान के लिए रसायन A, B तथा C की क्रमशः 24, 24 तथा 20 इकाई की आवश्यकता है। उत्पाद P के प्रत्येक मर्तबान में रसायन A, B तथा C की क्रमशः 2, 4 तथा 1 इकाई हैं तथा उत्पाद Q के प्रत्येक मर्तबान में रसायन A, B तथा C की क्रमशः 2, 1 तथा 5 इकाई हैं। यदि P के एक मर्तबान का मूल्य ₹ 30 है तथा Q के एक मर्तबान का मूल्य ₹ 50 है, तब न्यूनतम खर्च तथा आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए प्रत्येक उत्पाद के कितने मर्तबान खरीदे जाएँ?

A person requires 24, 24 and 20 units of chemicals A, B and C respectively for his garden. Product P contains 2, 4 and 1 units of chemicals A, B and C respectively per jar and product Q contains 2, 1 and 5 units of chemicals A, B and C respectively per jar. If a jar of P costs ₹ 30 and a jar of Q costs ₹ 50, then how many jars of each should be purchased in order to minimize the cost and meet the requirements? 10

2. *(a)* सिद्ध कीजिए कि $2p$ कोटि के एक अक्रमविनिमेय समूह, जहाँ p एक विषम अभाज्य संख्या है, में p कोटि का एक उपसमूह होना आवश्यक है।

Prove that a non-commutative group of order $2p$, where p is an odd prime, must have a subgroup of order p. 15

(b) लग्रांज गुणक विधि के उपयोग से बिंदु $P(2, 6, 3)$ की गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ से न्यूनतम तथा अधिकतम दूरियाँ ज्ञात कीजिए।

Using the method of Lagrange's multipliers, find the minimum and maximum distances of the point $P(2, 6, 3)$ from the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. 15

(c) कन्टूर समाकलन का उपयोग कर $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$ using contour integration. 20

3. (a) सिद्ध कीजिए कि $x^2 + 1$, $Z_3[x]$ में एक अखंडनीय बहुपद है। यह भी दर्शाइए कि विभाग वलय $\frac{Z_3[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$, 9 अवयवों का एक क्षेत्र है।

Prove that $x^2 + 1$ is an irreducible polynomial in $Z_3[x]$. Further show that the quotient ring $\frac{Z_3[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ is a field of 9 elements. 15

(b) सिद्ध कीजिए कि $u(x, y) = e^x (x\cos y - y\sin y)$ प्रसंवादी है। इसका संयुग्मी प्रसंवादी फलन $v(x, y)$ ज्ञात कीजिए तथा संगत विश्लेषिक फलन $f(z)$ को z के पदों में व्यक्त कीजिए।

Prove that $u(x, y) = e^x (x\cos y - y\sin y)$ is harmonic. Find its conjugate harmonic function $v(x, y)$ and express the corresponding analytic function $f(z)$ in terms of z. 15

(c) बड़ा M (बिग M) विधि से निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

न्यूनतमीकरण कीजिए $Z = 2x_1 + 3x_2$

बशर्ते कि

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 9 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 15 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

क्या इष्टतम हल अद्वितीय है? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए।

Solve the following linear programming problem by Big M method :

Minimize $Z = 2x_1 + 3x_2$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 9 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 15 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Is the optimal solution unique? Justify your answer. 20

4. *(a)* सिद्ध कीजिए कि $[a, b]$ पर परिभाषित एक वास्तविक मान परिबद्ध फलन f का दोलन, समुच्चय $\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [a, b]\}$ का उच्चक है।

Prove that the oscillation of a real-valued bounded function f defined on $[a, b]$ is the supremum of the set $\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [a, b]\}$. 15

(b) फलन $f(z) = \dfrac{e^z}{z - \sin z}$ के विचित्र बिंदु $z = 0$ का वर्गीकरण कीजिए तथा इसके लौराँ श्रेणी प्रसार का मुख्य भाग ज्ञात कीजिए।

Classify the singular point $z = 0$ of the function $f(z) = \dfrac{e^z}{z - \sin z}$ and obtain the principal part of its Laurent series expansion. 15

(c) एक विभाग के अध्यक्ष के आधीन 5 कर्मचारी हैं तथा उसके पास 5 कार्य हैं। प्रत्येक कर्मचारी के लिए प्रत्येक कार्य को करने का समय (घण्टों में) नीचे आव्यूह में दिया गया है :

		कार्य				
		A	*B*	*C*	*D*	*E*
कर्मचारी	*I*	4	9	4	12	4
	II	15	11	20	5	8
	III	17	7	15	12	18
	IV	9	13	11	9	14
	V	6	11	12	9	14

कुल समय के न्यूनतमीकरण के लिए, प्रत्येक कर्मचारी को एक कार्य किस प्रकार दिया जाए? यदि कर्मचारी *IV* को कार्य *C* नहीं दिया जा सकता है, तो सभी कार्यों को करने में लगने वाला कुल न्यूनतम समय भी ज्ञात कीजिए।

A department head has 5 subordinates and 5 jobs to be performed. The time (in hours) that each subordinate will take to perform each job is given in the matrix below :

		Jobs				
		A	*B*	*C*	*D*	*E*
Subordinates	*I*	4	9	4	12	4
	II	15	11	20	5	8
	III	17	7	15	12	18
	IV	9	13	11	9	14
	V	6	11	12	9	14

How should the jobs be assigned, one to each subordinate, so as to minimize the total time? Also, obtain the total minimum time to perform all the jobs if the subordinate *IV* cannot be assigned job *C*. 20

खण्ड—B / SECTION—B

5\. (a) $z = f(x^2 - y) + g(x^2 + y)$ से स्वैच्छिक फलनों f तथा g का विलोपन कर आंशिक अवकल समीकरण बनाइए।

By eliminating the arbitrary functions f and g from $z = f(x^2 - y) + g(x^2 + y)$, form partial differential equation. 10

(b) दिया है $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x}{y^2 + x}$ तथा प्रारंभिक प्रतिबंध $x = 0$ पर $y = 1$ है। ऑयलर की विधि से पग लंबाई (स्टेप लेंथ) $h = 0 \cdot 1$ लेते हुए $x = 0 \cdot 4$ के लिए y का मान, दशमलव के 4 स्थानों तक सही, ज्ञात कीजिए।

Given $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x}{y^2 + x}$ with initial condition $y = 1$ at $x = 0$. Find the value of y for $x = 0 \cdot 4$ by Euler's method, correct to 4 decimal places, taking step length $h = 0 \cdot 1$. 10

(c) द्वि-आधारी अंकगणित का उपयोग कर निम्नलिखित संख्याओं का मूल्यांकन उनकी दी गई पद्धति में कीजिए :

(i) $(634 \cdot 235)_8 - (132 \cdot 223)_8$

(ii) $(7AB \cdot 432)_{16} - (5CA \cdot D61)_{16}$

Evaluate, using the binary arithmetic, the following numbers in their given system :

(i) $(634 \cdot 235)_8 - (132 \cdot 223)_8$

(ii) $(7AB \cdot 432)_{16} - (5CA \cdot D61)_{16}$ 10

(d) m द्रव्यमान का एक ग्रह M द्रव्यमान के सूर्य की परिक्रमा कर रहा है। ग्रह की गतिज ऊर्जा T तथा स्थितिज ऊर्जा V, $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$ तथा $V = G\,Mm\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{r}\right)$ द्वारा दी गई हैं, जहाँ t समय पर ग्रह के ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ) हैं, गुरुत्वीय स्थिरांक G है तथा दीर्घवृत्त (ग्रह का पथ) का दीर्घ अक्ष $2a$ है। ग्रह की गति के लिए हैमिल्टनी तथा हैमिल्टन समीकरणों को ज्ञात कीजिए।

A planet of mass m is revolving around the sun of mass M. The kinetic energy T and the potential energy V of the planet are given by $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$ and $V = G\,Mm\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{r}\right)$, where (r, θ) are the polar coordinates of the planet at time t, G is the gravitational constant and $2a$ is the major axis of the ellipse (the path of the planet). Find the Hamiltonian and the Hamilton equations of the planet's motion. 10

(e) एक तरल प्रवाह में, $2m$ सामर्थ्य का एक स्रोत $z = 2$ पर स्थित है तथा m सामर्थ्य के दो अभिगम (सिंक) $z = 2 + i$ और $z = 2 - i$ पर स्थित हैं। प्रवाह-रेखाएँ ज्ञात कीजिए।

In a fluid motion, there is a source of strength $2m$ placed at $z = 2$ and two sinks of strength m are placed at $z = 2 + i$ and $z = 2 - i$. Find the streamlines. 10

6. *(a)* दो रेखाओं $z = x = 0$ तथा $z - 1 = x - y = 0$ से होकर जाने वाला और आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ को संतुष्ट करने वाला पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

Find the surface passing through the two lines $z = x = 0$ and $z - 1 = x - y = 0$, and satisfying the partial differential equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. 15

(b) गाउस-सीडेल पुनरावर्ती विधि से रैखिक समीकरण निकाय

$$7x_1 - x_2 + 2x_3 = 11$$
$$2x_1 + 8x_2 - x_3 = 9$$
$$x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 7$$

का 4 सार्थक अंकों तक सही हल ज्ञात कीजिए। आरंभिक अनुमानित हल $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ लीजिए।

Solve the system of linear equations

$$7x_1 - x_2 + 2x_3 = 11$$
$$2x_1 + 8x_2 - x_3 = 9$$
$$x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 7$$

correct up to 4 significant figures by the Gauss-Seidel iterative method. Take initially guessed solution as $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 15

(c) स्वतंत्रता की कोटि 2 के एक यांत्रिक तंत्र का लग्रांजियन

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m(w_1^2 x^2 + w_2^2 y^2) + kxy$$

है, जहाँ m, w_1, w_2, k अचर हैं। वह प्राचल θ ज्ञात कीजिए, जिसके लिए रूपांतरण

$$x = q_1 \cos\theta - q_2 \sin\theta, \quad y = q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta$$

के अंतर्गत q_1, q_2 के पदों में लग्रांजियन में गुणन पद $q_1 q_2$ नहीं होगा। प्राचल θ से स्वतंत्र, q_1 तथा q_2 के सापेक्ष लग्रांज समीकरणों को ज्ञात कीजिए।

A mechanical system with 2 degrees of freedom has the Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m(w_1^2 x^2 + w_2^2 y^2) + kxy$$

where m, w_1, w_2, k are constants. Find the parameter θ so that under the transformation

$$x = q_1 \cos\theta - q_2 \sin\theta, \quad y = q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta$$

the Lagrangian in terms of q_1, q_2 will not contain the product term $q_1 q_2$. Find the Lagrange's equations w.r.t. q_1 and q_2 independent of parameter θ. 20

7. *(a)* *(i)* निम्न बूलीय फलन का योगात्मक प्रसामान्य स्वरूप (CNF) ज्ञात कीजिए :

$$f(x, y, z, t) = x \cdot y \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot (t + \overline{z})$$

(ii) बूलीय फलन

$$f(x, y, z) = x + \overline{(\overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot z)} + z$$

को वियोजनीय (डिसूजंक्टिव) प्रसामान्य स्वरूप (DNF) में व्यक्त कीजिए तथा इस फलन के लिए सत्यमान सारणी बनाइए।

(i) Find the conjunctive normal form (CNF) of the following Boolean function :

$$f(x, y, z, t) = x \cdot y \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot (t + \overline{z})$$

(ii) Express the Boolean function

$$f(x, y, z) = x + \overline{(\overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot z)} + z$$

in disjunctive normal form (DNF) and construct the truth table for the function. 15

(b) एक आदर्श रुक्ष गेंद एक खोखले बेलनाकार रोलर में विराम की स्थिति में है। रोलर को एक समतल पथ के अनुदिश एकसमान वेग V से खींचा जाता है। मान लीजिए कि a तथा b क्रमशः गेंद तथा रोलर की त्रिज्याएँ हैं। यदि $V^2 > \frac{27}{7} g(b-a)$ है, तब दर्शाइए कि गेंद रोलर के अन्दर पूर्ण रूप से घूम जाएगी।

A perfectly rough ball is at rest within a hollow cylindrical roller. The roller is drawn along a level path with uniform velocity V. Let a and b be the radii of the ball and the roller respectively. If $V^2 > \frac{27}{7} g(b-a)$, then show that the ball will roll completely round the inside of the roller. 15

(c) आंशिक अवकल समीकरण

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0$$

का शर्तों

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 1, \quad 0 < x < L$$

से प्रतिबंधित हल ज्ञात कीजिए।

Solve the partial differential equation

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0$$

subject to the conditions

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 1, \quad 0 < x < L$$

20

8. *(a)* आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{z}{x} = 0$$

को विहित रूप में समानीत कीजिए।

Reduce the partial differential equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{z}{x} = 0$$

to canonical form. 15

(b) मिथ्या-स्थिति (रेगुला-फाल्सि) विधि से अंतराल [0, 3] में, समीकरण $\log_{10}(2x+1) - x^2 + 3 = 0$ के एक मूल का, दशमलव के 6 स्थानों तक सही, अभिकलन कीजिए।

Compute a root of the equation $\log_{10}(2x+1) - x^2 + 3 = 0$, in the interval [0, 3], by Regula-Falsi method, correct to 6 decimal places. 15

(c) ज्ञात कीजिए कि किन शर्तों के अंतर्गत वेग क्षेत्र (velocity field) $u = c(x^2 - y^2)$, $v = -2cxy$, $w = 0$ नेवियर-स्टोक्स संवेग समीकरणों का एक हल है। यह मानते हुए कि शर्तें मान्य हैं, परिणामी दाब बंटन ज्ञात कीजिए, जब z ऊपर है तथा बाह्य पिंड बल $B_x = 0 = B_y$, $B_z = -g$ हैं।

Determine under what conditions the velocity field $u = c(x^2 - y^2)$, $v = -2cxy$, $w = 0$ is a solution to the Navier-Stokes momentum equations. Assuming that the conditions are met, determine the resulting pressure distribution, when z is up and the external body forces are $B_x = 0 = B_y$, $B_z = -g$. 20

★ ★ ★