खण्ड 'A'

SECTION 'A'

1.(a) मान लीजिए $V_1 = (2, -1, 3, 2)$, $V_2 = (-1, 1, 1, -3)$, $V_3 = (1, 1, 9, -5)$ समष्टि $\mathbb{R}^4$ के तीन सदिश हैं। क्या $(3, -1, 0, -1) \in$ विस्तृति $\{V_1, V_2, V_3\}$? अपने उत्तर को तर्कसहित सिद्ध कीजिए।

Let $V_1 = (2, -1, 3, 2)$, $V_2 = (-1, 1, 1, -3)$ and $V_3 = (1, 1, 9, -5)$ be three vectors of the space $\mathbb{R}^4$. Does $(3, -1, 0, -1) \in$ span $\{V_1, V_2, V_3\}$? Justify your answer. 10

1.(b) $T(x, y, z) = (x + z,\ x + y + 2z,\ 2x + y + 3z)$ द्वारा दिए गए रैखिक रूपांतरण : $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ की कोटि तथा शून्यता ज्ञात कीजिए।

Find the rank and nullity of the linear transformation : $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ given by $T(x, y, z) = (x + z,\ x + y + 2z,\ 2x + y + 3z)$ 10

1.(c) p तथा q के वो मान निकालिए जिसके लिए $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 + p\cos x) - q\sin x}{x^3}$ का अस्तित्व है एवं 1 के बराबर है।

Find the values of p and q for which $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 + p\cos x) - q\sin x}{x^3}$ exists and equals 1. 10

1.(d) समाकल $\int_0^1 \dfrac{\log x}{1 + x} dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Examine the convergence of the integral $\int_0^1 \dfrac{\log x}{1 + x} dx$ 10

1.(e) एक चर समतल, जो कि मूल-बिन्दु O से अचर दूरी $3p$ पर है, अक्षों को क्रमशः बिन्दुओं A, B, C पर काटता है। दर्शाइए कि चतुष्फलक $OABC$ के केन्द्रक का बिन्दुपथ

$$9\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{16}{p^2}$$ है।

A variable plane which is at a constant distance $3p$ from the origin O cuts the axes in the points A, B, C respectively. Show that the locus of the centroid of the tetrahedron $OABC$ is

$$9\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{16}{p^2}.$$ 10

2.(a) यदि आधार $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ के सापेक्ष रैखिक रूपांतरण $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ का आव्यूह

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$ है,

तब आधार $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

If the matrix of a linear transformation $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ relative to the basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ is

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix},$$

then find the matrix of T relative to the basis $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$. 15

2.(b) दो परवलयजों $Z=5(x^2+y^2)$ और $Z=6-7x^2-y^2$ के बीच घिरे ठोस के आयतन को दर्शाने वाले त्रिश: समाकल का मान निकालिए।

Evaluate the triple integral which gives the volume of the solid enclosed between the two paraboloids $Z=5(x^2+y^2)$ and $Z=6-7x^2-y^2$. 15

2.(c)(i) दर्शाइए कि समीकरण $2x^2+3y^2-8x+6y-12z+11=0$ एक दीर्घवृत्तीय परवलयज प्रदर्शित करता है। साथ ही मुख्य अक्ष और मुख्य समतलों को भी ज्ञात कीजिए।

Show that the equation $2x^2+3y^2-8x+6y-12z+11=0$ represents an elliptic paraboloid. Also find its principal axis and principal planes. 10

2.(c)(ii) समतल $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, निर्देशांक अक्षों को क्रमश: A, B, C में मिलता है। सिद्ध कीजिये कि मूल बिन्दु O से वृत्त ABC को मिलाने वाली रेखाओं द्वारा जनित शंकु का समीकरण

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=0 \text{ है।}$$

The plane $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ meets the coordinate axes in A, B, C respectively. Prove that the equation of the cone generated by the lines drawn from the origin O to meet the circle ABC is

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=0.$$ 10

3.(a) दिया गया है $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(i) आव्यूह A के लिये कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

(ii) दर्शाइए कि $n\geq 3$ के लिये $A^n=A^{n-2}+A^2-I$; जहाँ I कोटि 3 का तत्समक आव्यूह है। अतएव A^{40} ज्ञात कीजिए।

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(i) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix A.

(ii) Show that $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ for $n \geq 3$, where I is the identity matrix of order 3. Hence, find A^{40}. 10+10

3.(b) तर्क सहित दर्शाइये कि (0, 0), फलन $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ का चरम-बिन्दु है अथवा नहीं।

Justify whether (0, 0) is an extreme point for the function $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$. 15

3.(c) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 16 = 0;\ 3x + y + 3z - 4 = 0$ से होकर गुजरने वाले गोले का समीकरण निम्न दो स्थितियों में ज्ञात कीजिए।

(i) बिन्दु (1, 0, –3) गोले पर हो।

(ii) दिया गया वृत्त गोले का एक वृहत् वृत्त हो।

Find the equation of the sphere through the circle
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 16 = 0;\ 3x + y + 3z - 4 = 0$
in the following two cases.

(i) the point (1, 0, –3) lies on the sphere.

(ii) the given circle is a great circle of the sphere. 15

4.(a) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

का पंक्ति समानीत सोपानक रूप में समानयन करके उसकी कोटि ज्ञात कीजिए।

Find the rank of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

by reducing it to row-reduced echelon form. 15

4.(b) वक्र $y^2(x^2 - 1) = 2x - 1$ को अनुरेखित कीजिए।

Trace the curve $y^2(x^2 - 1) = 2x - 1$. 20

4.(c) सिद्ध कीजिए कि रेखाओं $y = mx, z = c; y = -mx, z = -c$ और वृत्त $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ से मिलने वाली रेखा का बिन्दु-पथ $c^2m^2(cy - mzx)^2 + c^2(yz - cmx)^2 = a^2m^2(z^2 - c^2)^2$ है।

Prove that the locus of a line which meets the lines $y = mx, z = c; y = -mx, z = -c$ and the circle $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ is $c^2m^2(cy - mzx)^2 + c^2(yz - cmx)^2 = a^2m^2(z^2 - c^2)^2$. 15

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5.(a) प्रारम्भिक-मान समस्या : $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2, \quad y(0) = 1$ का हल $y = e^{x^2}\left[1 + \sqrt{\pi}\, erf(x)\right]$ के रूप में प्राप्त कीजिए।

Obtain the solution of the initial-value problem $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2, \quad y(0) = 1$ in the form $y = e^{x^2}\left[1 + \sqrt{\pi}\, erf(x)\right]$. 10

5.(b) दिया गया है $L\{f(t); p\} = F(p)$.

दर्शाइए कि $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(x)dx$. अतः समाकल $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt$ का मान ज्ञात कीजिए।

Given that $L\{f(t); p\} = F(p)$.

Show that $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(x)dx$. Hence evaluate the integral $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt$. 10

5.(c) अर्द्धव्यास 'a' का एक बेलन (सिलिंडर) एक जनक रेखा के अनुदिश एक ऊर्ध्वाधर दीवार को स्पर्श किया हुआ है। बेलन का अक्ष क्षैतिजतः स्थिर है। लम्बाई 'l' तथा भार 'W' का एक एक समान समतल दंड ऊर्ध्वाधर से 45° का कोण बनाते हुए अपने सिरों को दीवार के सहारे तथा बेलन पर टिकाए हैं। अगर घर्षण बल नगण्य हैं, तब दर्शाइए कि

$$\frac{a}{l} = \frac{\sqrt{5} + 5}{4\sqrt{2}}$$

दीवार और बेलन की प्रतिक्रियायें भी ज्ञात कीजिए।

A cylinder of radius 'a' touches a vertical wall along a generating line. Axis of the cylinder is fixed horizontally. A uniform flat beam of length 'l' and weight 'W' rests with its extremities in contact with the wall and the cylinder, making an angle of 45° with the vertical. If frictional forces are neglected, then show that

$$\frac{a}{l} = \frac{\sqrt{5} + 5}{4\sqrt{2}}.$$ 10

Also, find the reactions of the cylinder and wall.

5.(d) कोई कण केन्द्र 'O' के सापेक्ष आवर्त काल T के साथ सरल आवर्त गति में गतिशील है। कण बिन्दु P से OP के अनुदिश दिशा में v वेग से गुजरता है तथा $OP = p$ है। कण का बिन्दु P पर पुनः लौटने में लगा समय ज्ञात कीजिए। यदि लगा समय $\frac{T}{2}$ हो, तो p का मान क्या होगा ?

A particle is moving under Simple Harmonic Motion of period T about a centre O. It passes through the point P with velocity v along the direction OP and $OP = p$. Find the time that elapses before the particle returns to the point P. What will be the value of p when the elapsed time is $\frac{T}{2}$? 10

5.(e) यदि $\vec{a} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} + \theta\,\hat{k}$

$\vec{b} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

तो सदिश फलन $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ के θ के सापेक्ष अवकलज के मान, $\theta = \frac{\pi}{2}$ और $\theta = \pi$ पर ज्ञात कीजिए।

If $\vec{a} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} + \theta\,\hat{k}$

$\vec{b} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

then find the values of the derivative of the vector function $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ w.r.t. θ at $\theta = \frac{\pi}{2}$ and $\theta = \pi$. 10

6.(a) अवकल समीकरण :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x$$

का हल कीजिए।

Solve the differential equation :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x.$$

15

6.(b) एक कण को समुद्र तल पर बिन्दु O_1 से वेग v तथा क्षैतिज से प्रक्षेप कोण θ पर ऊर्ध्वाधर तल में प्रक्षेपित किया जाता है तो क्षैतिज परास R_1 है। यदि इसको पुनः बिन्दु O_2, जो उसी ऊर्ध्वाधर तल में O_1 के ऊर्ध्वाधरतः h ऊँचाई पर है, से उसी वेग v तथा क्षैतिज से समान कोण θ पर प्रक्षेपित किया जाता है तो क्षैतिज परास R_2 है।

सिद्ध कीजिए $R_2 > R_1$ तथा $(R_2 - R_1) : R_1 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2\theta}\right)} - 1\right\} : 1$

When a particle is projected from a point O_1 on the sea level with a velocity v and angle of projection θ with the horizon in a vertical plane, its horizontal range is R_1. If it is further projected from a point O_2, which is vertically above O_1 at a height h in the same vertical plane, with the same velocity v and same angle θ with the horizon, its horizontal range is R_2. Prove that $R_2 > R_1$ and $(R_2 - R_1) : R_1$ is equal to

$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{2gh}{v^2\sin^2\theta}\right)}-1\right\} : 1$$ 15

6.(c) समाकल $\iint_S \left(3y^2z^2\,\hat{i}+4z^2x^2\,\hat{j}+z^2y^2\,\hat{k}\right)\cdot\hat{n}\,dS$ का मान ज्ञात कीजिए; जहाँ S समतल $z=0$ के ऊपर पृष्ठ $4x^2+4y^2+4z^2=1$ का ऊपरी भाग है और xy-समतल द्वारा परिबद्ध है। अतैव गॉस-अपसरण प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Evaluate the integral $\iint_S \left(3y^2z^2\,\hat{i}+4z^2x^2\,\hat{j}+z^2y^2\,\hat{k}\right)\cdot\hat{n}\,dS$, where S is the upper part of the surface $4x^2+4y^2+4z^2=1$ above the plane $z=0$ and bounded by the xy-plane. Hence, verify Gauss-Divergence theorem. 20

7.(a)(i) अवकल समीकरण : $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3+2}{3x^2y^2+8e^{4y}}$ का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the differential equation : $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3+2}{3x^2y^2+8e^{4y}}$ 10

7.(a)(ii) समीकरण $x^2p^2+y(2x+y)p+y^2=0$ का प्रतिस्थापन $y=u$ और $xy=v$ द्वारा क्लेरो रूप में समानयन कीजिए। अतः समीकरण का हल निकालिए और दर्शाइए कि $y+4x=0$ अवकल समीकरण का एक विचित्र हल है।

Reduce the equation $x^2p^2+y(2x+y)p+y^2=0$ to Clairaut's form by the substitution $y=u$ and $xy=v$. Hence solve the equation and show that $y+4x=0$ is a singular solution of the differential equation. 10

7.(b) एक ठोस अर्द्ध-गोलक एक डोरी द्वारा, जिसका एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर एक बिन्दु से और दूसरा सिरा अर्द्धगोलक के किनारे (रिम) पर स्थित एक बिन्दु से बंधा है, ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे टिका है। ठोस अर्द्धगोलक का वक्रित पृष्ठ दीवार को स्पर्श करता है। अगर ऊर्ध्वाधर के साथ डोरी का आनति कोण θ है और अर्द्धगोलक के समतल आधार (बेस) का आनति कोण ϕ है तो $(\tan\phi - \tan\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

A solid hemisphere is supported by a string fixed to a point on its rim and to a point on a smooth vertical wall with which the curved surface is in contact. If θ is the angle of inclination of the string with vertical and ϕ is the angle of inclination of the plane base of the hemisphere to the vertical, then find the value of $(\tan\phi - \tan\theta)$. 15

7.(c) अगर एक वक्र की स्पर्श रेखा एक नियत रेखा के साथ एक स्थिर कोण θ बनाती है तो सिद्ध कीजिए कि वक्रता की त्रिज्या के साथ व्यावर्तन त्रिज्या का अनुपात $\tan\theta$ के समानुपाती है। और आगे सिद्ध कीजिए कि अगर यह अनुपात एक स्थिरांक है, तो स्पर्श रेखा एक नियत दिशा के साथ एक स्थिर कोण बनाती है।

If the tangent to a curve makes a constant angle θ with a fixed line, then prove that the ratio of radius of torsion to radius of curvature is proportional to $\tan\theta$. Further prove that if this ratio is constant, then the tangent makes a constant angle with a fixed direction. 15

8.(a) लाप्लास रूपान्तर प्रविधि का उपयोग कर निम्नलिखित प्रारम्भिक मान समस्या को हल कीजिए।

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = f(t),$$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ और $f(t)$, t का एक दिया गया फलन है।

Solve the following initial value problem by using Laplace transform technique:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = f(t),$$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ and $f(t)$ is a given function of t. 15

8.(b) एक कण, बल-केन्द्र से $\sqrt{c}$ दूरी पर स्थित एक स्तब्धिका से $\sqrt{\frac{2\lambda}{3}c^3}$ वेग से प्रक्षेपित किया जाता है और यह केन्द्रीय त्वरण $\lambda(r^5 - c^2r)$ से गतिशील है। इस कण की गति का पथ ज्ञात कीजिए। क्या यह वक्र $x^4 + y^4 = c^2$ होगा ?

A particle is projected from an apse at a distance $\sqrt{c}$ from the centre of force with a velocity $\sqrt{\frac{2\lambda}{3}c^3}$ and is moving with central acceleration $\lambda(r^5 - c^2r)$. Find the path of motion of this particle. Will that be the curve $x^4 + y^4 = c^2$? 20

8.(c) एक अदिश बिन्दु फलन ϕ और सदिश बिन्दु फलन $\vec{f}$ के लिये निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए

$$\nabla\cdot(\phi\vec{f}) = \nabla\phi\cdot\vec{f} + \phi(\nabla\cdot\vec{f})$$

$\nabla\cdot\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right)$ का मान भी ज्ञात कीजिए और तब उल्लेखित सर्वसमिका का सत्यापन कीजिए।

For a scalar point function ϕ and vector point function $\vec{f}$, prove the identity $\nabla\cdot(\phi\vec{f}) = \nabla\phi\cdot\vec{f} + \phi(\nabla\cdot\vec{f})$. Also find the value of $\nabla\cdot\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right)$ and then verify stated identity. 15