गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र II / Paper II

निर्धारित समय : तीन घंटे
Time allowed : **Three** Hours

अधिकतम अंक : **250**
Maximum Marks : **250**

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों का उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

*इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो **खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हैं ।*

*परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।*

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । उत्तर-पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions:

*There are **EIGHT** questions divided in two **SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the answer book must be clearly struck off.

खण्ड A
SECTION A

Q1. (a) आव्यूह योग तथा आव्यूह गुणन की सामान्य द्विआधारी संक्रियाओं के अन्तर्गत दर्शाइए कि आव्यूहों का समुच्चय $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ एक क्षेत्र है । योगात्मक तथा गुणनात्मक तत्समक क्या हैं और $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ का व्युत्क्रम क्या है ? $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ द्वारा परिभाषित मानचित्र $f : \mathbb{C} \rightarrow S$, पर विचार कीजिए । दर्शाइए कि f एकैक समाकारी है । (यहाँ $\mathbb{R}$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा $\mathbb{C}$ सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है ।)

(b) अपरिमित समूह का एक उदाहरण दीजिए जिसमें प्रत्येक अवयव परिमित कोटि रखता है ।

(c) मान लीजिए $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 4 & \text{यदि } x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2}{2} + 2 & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$

क्या f, $[-1, 2]$ अन्तराल में रीमान समाकलनीय है ? क्यों ? क्या ऐसे फलन g का अस्तित्व है कि $g'(x) = f(x)$ हो ? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए ।

(d) सिद्ध कीजिए कि यदि $b\, e^{a+1} < 1$, जहाँ a तथा b धनात्मक और वास्तविक हैं, तो फलन $z^n e^{-a} - b\, e^z$ के एकांक वृत्त में n शून्य होते हैं ।

(e) अधिकतमीकरण कीजिए $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

बशर्ते कि $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

तथा $2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10, \; x_i \geq 0.$

IMS™ (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

(a) Show that the set of matrices $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ is a field under the usual binary operations of matrix addition and matrix multiplication. What are the additive and multiplicative identities and what is the inverse of $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$? Consider the map $f : \mathbb{C} \to S$ defined by $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Show that f is an isomorphism. (Here $\mathbb{R}$ is the set of real numbers and $\mathbb{C}$ is the set of complex numbers.) *10*

(b) Give an example of an infinite group in which every element has finite order. *10*

(c) Let $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 4 & \text{if } x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2}{2} + 2 & \text{if } x < 0 \end{cases}$

Is f Riemann integrable in the interval $[-1, 2]$? Why ? Does there exist a function g such that $g'(x) = f(x)$? Justify your answer. *10*

(d) Prove that if $b\,e^{a+1} < 1$ where a and b are positive and real, then the function $z^n e^{-a} - b\,e^z$ has n zeroes in the unit circle. *10*

(e) Maximize $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

subject to $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

and $2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10,\ x_i \geq 0.$ *10*

Q2. (a) S_{10} में निम्नलिखित क्रमचयों की कोटियाँ क्या हैं ?

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 7 & 3 & 10 & 5 & 4 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ तथा $(1\,2\,3\,4\,5)\,(6\,7)$.

(b) S_{10} में एक अवयव की उच्चिष्ठ संभव कोटि क्या है ? क्यों ? इस प्रकार के अवयव का एक उदाहरण दीजिए । S_{10} में उस कोटि के कितने अवयव होंगे ?

(c) दर्शाइए कि श्रृंखला $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$, एकसमान अभिसारी है परन्तु निरपेक्षतः नहीं, x के सभी वास्तविक मानों के लिए ।

(d) दर्शाइए कि $\mathbb{R}$ का प्रत्येक विवृत उपसमुच्चय असंयुक्त विवृत अन्तरालों का गणनीय सम्मिलन है ।

(a) What are the orders of the following permutations in S_{10} ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 7 & 3 & 10 & 5 & 4 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ and } (1\,2\,3\,4\,5)\,(6\,7).$$ 10

(b) What is the maximal possible order of an element in S_{10} ? Why ? Give an example of such an element. How many elements will there be in S_{10} of that order ? 13

(c) Show that the series $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$, is uniformly convergent but not absolutely for all real values of x. 13

(d) Show that every open subset of $\mathbb{R}$ is a countable union of disjoint open intervals. 14

Q3. (a) मान लीजिए $J = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ गाउसीय पूर्णांकों का वलय ($\mathbb{C}$ का उपवलय) है । J निम्नलिखित में से कौन-सा है : यूक्लिडीय डोमेन (प्रान्त), मुख्य गुणजावली डोमेन (प्रान्त), अद्वितीय गुणनखंडन डोमेन (प्रान्त) ? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए ।

(b) मान लीजिए $R^C = [0, 1]$ पर सभी वास्तविक मानांकित संतत फलनों का वलय, जो निम्न संक्रियाओं के अंतर्गत हैं

$$(f + g)\, x = f(x) + g(x)$$

$$(fg)\, x = f(x)\, g(x).$$

मान लीजिए $M = \left\{ f \in R^C \,\middle|\, f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}$.

क्या M, R की एक उच्चिष्ठ गुणजावली है ? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए ।

(c) मान लीजिए $f(x, y) = y^2 + 4xy + 3x^2 + x^3 + 1$ है । किन बिन्दुओं पर f(x, y) का अधिकतम अथवा न्यूनतम होगा ?

(d) मान लीजिए [x] वास्तविक संख्या x का पूर्णांक भाग द्योतित करता है, अर्थात् यदि $n \le x < n + 1$ जहाँ n पूर्णांक है, तो $[x] = n$ । क्या फलन $f(x) = [x]^2 + 3$, $[-1, 2]$ में रीमान समाकलनीय है ? यदि नहीं, तो समझाइए क्यों । यदि यह समाकलनीय है, तो परिकलित कीजिए $\int_{-1}^{2} ([x]^2 + 3)\, dx$.

(a) Let $J = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ be the ring of Gaussian integers (subring of $\mathbb{C}$). Which of the following is J : Euclidean domain, principal ideal domain, unique factorization domain ? Justify your answer. *15*

(b) Let R^C = ring of all real valued continuous functions on [0, 1], under the operations

$$(f + g)\,x = f(x) + g(x)$$

$$(fg)\,x = f(x)\,g(x).$$

Let $M = \left\{ f \in R^C \;\middle|\; f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}$.

Is M a maximal ideal of R ? Justify your answer. *15*

(c) Let $f(x, y) = y^2 + 4xy + 3x^2 + x^3 + 1$. At what points will f(x, y) have a maximum or minimum ? *10*

(d) Let [x] denote the integer part of the real number x, i.e., if $n \le x < n + 1$ where n is an integer, then $[x] = n$. Is the function $f(x) = [x]^2 + 3$ Riemann integrable in $[-1, 2]$? If not, explain why. If it is integrable, compute $\int_{-1}^{2} ([x]^2 + 3)\, dx$. *10*

Q4. (a) न्यूनतम समय नियतन समस्या को हल कीजिए :

मशीन

कार्य		M_1	M_2	M_3	M_4
	J_1	3	12	5	14
	J_2	7	9	8	12
	J_3	5	11	10	12
	J_4	6	14	4	11

(b) कौशी अवशेष प्रमेय का इस्तेमाल करते हुए, समाकल

$$I = \int_0^{\pi} \sin^4 \theta \, d\theta$$

का मान निकालिए ।

(c) न्यूनतमीकरण कीजिए $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$

बशर्ते व्यवरोध

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &\le 40 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\le 10 \\ x_i &\ge 0 \end{aligned}$$

(a) Solve the minimum time assignment problem : *15*

Machines

Jobs		M_1	M_2	M_3	M_4
	J_1	3	12	5	14
	J_2	7	9	8	12
	J_3	5	11	10	12
	J_4	6	14	4	11

IMS™ (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

(b) Using Cauchy's residue theorem, evaluate the integral

$$I = \int_0^{\pi} \sin^4 \theta \, d\theta$$ *15*

(c) Minimize $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$

subject to the constraints

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &\le 40 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\le 10 \\ x_i &\ge 0 \end{aligned}$$ *20*

खण्ड B

SECTION B

Q5. (a) $z = y\,f(x) + x\,g(y)$ से स्वेच्छ फलनों f तथा g के विलोपन द्वारा एक आंशिक अवकल समीकरण बनाइए ।

(b) समीकरण $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x+y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + x\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ को इसके विहित रूप (कैनोनिकल फॉर्म) में समानीत कीजिए जब $x \neq y$.

(c) एक परीक्षा में, निश्चित सीमाओं के बीच जिन छात्रों ने अंक प्राप्त किए उनकी संख्या निम्नलिखित सारणी में दी गई हैं :

अंक	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
छात्रों की संख्या	31	42	51	35	31

न्यूटन अग्र अंतर्वेशन सूत्र का इस्तेमाल करते हुए, उन छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनके अंक 45 तथा 50 के बीच स्थित हैं ।

(d) सिद्ध कीजिए कि भ्रमिल रेखाओं का धारा रेखाओं से समकोण पर होने का आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबंध निम्नलिखित है :

$$u, v, w = \mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

जहाँ μ तथा φ, फलन हैं x, y, z, t के ।

(e) चार ठोस गोलों A, B, C तथा D, प्रत्येक का द्रव्यमान m तथा त्रिज्या a, को एक भुजा b वाले वर्ग के चारों कोनों पर इस प्रकार रखा गया है कि उनके केन्द्र ठीक कोनों पर हों । वर्ग के विकर्ण के गिर्द निकाय का जड़त्व आघूर्ण परिकलित कीजिए ।

(a) Form a partial differential equation by eliminating the arbitrary functions f and g from $z = y\,f(x) + x\,g(y)$. *10*

(b) Reduce the equation

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

to its canonical form when $x \neq y$. *10*

IMS™ (INSTITUTE OF MATHEMATICAL SCIENCES)

(c) In an examination, the number of students who obtained marks between certain limits were given in the following table :

Marks	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
No. of Students	31	42	51	35	31

Using Newton forward interpolation formula, find the number of students whose marks lie between 45 and 50. *10*

(d) Prove that the necessary and sufficient condition that the vortex lines may be at right angles to the stream lines are

$$u, v, w = \mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

where μ and φ are functions of x, y, z, t. *10*

(e) Four solid spheres A, B, C and D, each of mass m and radius a, are placed with their centres on the four corners of a square of side b. Calculate the moment of inertia of the system about a diagonal of the square. *10*

Q6. (a) हल कीजिए

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)\, z = x^2 \sin (x + y)$$

जहाँ D तथा D′ द्योतित करते हैं $\frac{\partial}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial}{\partial y}$.

(b) ऐसा पृष्ठ ज्ञात कीजिए जो निकाय

$$z(x + y) = C(3z + 1), \text{ (C एक स्थिरांक है)}$$

के पृष्ठों को लाम्बिकतः प्रतिच्छेद करता है तथा जो वृत्त $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ से गुज़रता है ।

(c) एक दृढ़तापूर्वक तानित डोरी जिसके अंत्य बिन्दु $x = 0$ तथा $x = l$ हैं, प्रारंभ में साम्य अवस्था में विराम पर है । यदि प्रत्येक बिन्दु को वेग $\lambda . x (l - x)$ द्वारा कम्पन के लिए सेट किया जाता है, तो किसी भी समय t पर एक सिरे से किसी भी दूरी x पर डोरी का विस्थापन ज्ञात कीजिए ।

(a) Solve

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)\, z = x^2 \sin (x + y)$$

where D and D′ denote $\frac{\partial}{\partial x}$ and $\frac{\partial}{\partial y}$. *15*

(b) Find the surface which intersects the surfaces of the system

$$z(x + y) = C(3z + 1), \text{ (C being a constant)}$$

orthogonally and which passes through the circle $x^2 + y^2 = 1, \; z = 1$. *15*

(c) A tightly stretched string with fixed end points $x = 0$ and $x = l$ is initially at rest in equilibrium position. If it is set vibrating by giving each point a velocity $\lambda . x (l - x)$, find the displacement of the string at any distance x from one end at any time t. *20*

Q7. (a) प्रारंभिक पुनरावृत्त x_0 से प्रारंभ करते हुए $f(x) = 0$ को हल करने के लिए न्यूटन – रैफसन विधि के लिए एक ऐल्गोरिथ्म विकसित कीजिए, n अनुमत पुनरावृत्तियों की संख्या है, eps निर्धारित सापेक्ष त्रुटि तथा डेल्टा $f'(x)$ के लिए निर्धारित निम्न परिबन्ध है ।

(b) प्रारंभिक मान समस्या

$$y' = x(y + x) - 2$$

$$y(0) = 2$$

से पाँच दशमलव स्थानों तक सही, $y(0 \cdot 6)$ का सन्निकट मान परिकलित करने के लिए पद आमाप (स्टेप साइज़) $h = 0 \cdot 15$ सहित ऑयलर विधि का प्रयोग कीजिए ।

(c) विराम अवस्था से प्रारंभ होकर एक रेलगाड़ी का वेग निम्न सारणी में दिया गया है । समय मिनट में है तथा वेग km/घण्टे में है ।

t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v	16	28·8	40	46·4	51·2	32·0	17·6	8	3·2	0

संयुक्त सिम्प्सन के $\frac{1}{3}$ नियम का इस्तेमाल करते हुए 30 मिनट में रेलगाड़ी द्वारा तय की गई कुल दूरी का सन्निकट आकलन कीजिए ।

(a) Develop an algorithm for Newton – Raphson method to solve $f(x) = 0$ starting with initial iterate x_0, n be the number of iterations allowed, eps be the prescribed relative error and delta be the prescribed lower bound for $f'(x)$. *20*

(b) Use Euler's method with step size $h = 0{\cdot}15$ to compute the approximate value of $y(0{\cdot}6)$, correct up to five decimal places from the initial value problem

$$y' = x(y + x) - 2$$
$$y(0) = 2$$

15

(c) The velocity of a train which starts from rest is given in the following table. The time is in minutes and velocity is in km/hour.

t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v	16	28·8	40	46·4	51·2	32·0	17·6	8	3·2	0

Estimate approximately the total distance run in 30 minutes by using composite Simpson's $\frac{1}{3}$ rule.

Q8. (a) प्रत्येक l लम्बाई की दो समान छड़ें AB तथा BC, B पर मसृणीकृत संधित तथा A से निलंबित हैं और A से गुज़रते ऊर्ध्वाधर समतल में दोलन कर रही हैं । दर्शाइए कि प्रसामान्य दोलन काल $\frac{2\pi}{n}$ हैं जहाँ $n^2 = \left(3 \pm \frac{6}{\sqrt{7}}\right)\frac{g}{l}$.

(b) यदि तरल, x-अक्ष की धनात्मक दिशा पर अवकाश क्षेत्र को भरता है, जो कि एक दृढ़ परिसीमा है तथा यदि वहाँ बिन्दु (0, a) पर एक स्रोत m है और (0, b) पर समान सिंक है तथा यदि ऋणात्मक दिशा पर लगाया गया दाब अनन्त पर लगे दाब के बराबर है, तो दर्शाइए कि परिसीमा पर परिणामी दाब $\frac{\pi \rho m^2 (a-b)^2}{\{2ab(a+b)\}}$ है, जहाँ ρ तरल का घनत्व है ।

(c) यदि समान सामर्थ्य K के n सरलरेखीय भ्रमिल, अनन्त द्रव में a त्रिज्या के एक वृत्ताकार बेलन के जनरेटरों (जनित्रों) के रूप में सममित व्यवस्थित किए जाते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि भ्रमिल बेलन के चारों ओर एकसमान रूप से समय $\frac{8\pi^2 a^3}{(n-1)K}$ में गति करेंगे । द्रव के किसी भी बिन्दु पर वेग ज्ञात कीजिए ।

(a) Two equal rods AB and BC, each of length l, smoothly jointed at B, are suspended from A and oscillate in a vertical plane through A. Show that the periods of normal oscillations are $\frac{2\pi}{n}$ where $n^2 = \left(3 \pm \frac{6}{\sqrt{7}}\right) \frac{g}{l}$. *15*

(b) If fluid fills the region of space on the positive side of the x-axis, which is a rigid boundary and if there be a source m at the point (0, a) and an equal sink at (0, b) and if the pressure on the negative side be the same as the pressure at infinity, show that the resultant pressure on the boundary is $\frac{\pi \rho m^2 (a-b)^2}{\{2ab(a+b)\}}$ where ρ is the density of the fluid. *15*

(c) If n rectilinear vortices of the same strength K are symmetrically arranged as generators of a circular cylinder of radius a in an infinite liquid, prove that the vortices will move round the cylinder uniformly in time $\frac{8\pi^2 a^3}{(n-1)K}$. Find the velocity at any point of the liquid. *20*