C. S. (Main) Exam : 2011

Serial No. | C–DTN–L–NUA

MATHEMATICS

Paper—I

Time Allowed : Three Hours | *Maximum Marks : 300*

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English. Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

*Candidates should attempt Question Nos. 1 and 5 which are compulsory, and any **three** of the remaining questions selecting at least **one** question from each Section.*

The number of marks carried by each question is indicated at the end of the question.

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols/notations carry their usual meanings, unless otherwise indicated.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

www.examrace.com

SECTION—A

1. (a) Let A be a non-singular, $n \times n$ square matrix. Show that $A \cdot (\text{adj } A) = |A| \cdot I_n$. Hence show that $|\text{adj }(\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$. 10

(b) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Solve the system of equations given by

$$AX = B$$

Using the above, also solve the system of equations $A^T X = B$ where A^T denotes the transpose of matrix A. 10

(c) Find $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$ if it exists. 10

(d) Let f be a function defined on $\mathbb{R}$ such that $f(0) = -3$ and $f'(x) \le 5$ for all values of x in $\mathbb{R}$. How large can f(2) possibly be ? 10

(e) Find the equations of the straight line through the point (3, 1, 2) to intersect the straight line

$$x + 4 = y + 1 = 2(z - 2)$$

and parallel to the plane $4x + y + 5z = 0$. 10

www.examrace.com

खण्ड—क

1. (क) लीजिए कि A एक व्युत्क्रमणीय $n \times n$ वर्ग आव्यूह है। दर्शाइए कि $A . (\text{adj } A) = |A| . I_n$. अतएव दर्शाइए कि $|\text{adj } (\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$. 10

(ख) लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

उपरोक्त का इस्तेमाल करते हुए,

$$AX = B$$

के द्वारा दत्त समीकरण तंत्रों को हल कीजिए। इसके साथ ही $A^T X = B$ समीकरण तंत्रों को हल कीजिए जहाँ A^T आव्यूह A के परिवर्त का द्योतन करता है। 10

(ग) मालूम कीजिए :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3},$$ यदि यह अस्तित्व में हो तो।

10

(घ) लीजिए f एक फलन, $\mathbb{R}$ पर परिभाषित, ऐसे कि $\mathbb{R}$ में x के सभी मानों के लिए $f(0) = -3$ और $f'(x) \leq 5$। $f(2)$ का कितना बड़ा हो सकना संभव है ? 10

(च) ऐसी ऋजु रेखा के समीकरण मालूम कीजिए, जो ऋजु रेखा

$$x + 4 = y + 1 = 2(z - 2)$$

का प्रतिच्छेदन करने के लिए बिंदु (3, 1, 2) के बीच से हो और समतल $4x + y + 5z = 0$ के समांतर हो। 10

www.examrace.com

(f) Show that the equation of the sphere which touches the sphere

$$4(x^2 + y^2 + z^2) + 10x - 25y - 2z = 0$$

at the point (1, 2, –2) and passes through the point (–1, 0, 0) is

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0.$$ 10

2. (a) (i) Let $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ be the eigen values of a $n \times n$ square matrix A with corresponding eigen vectors $X_1, X_2, ..., X_n$. If B is a matrix similar to A show that the eigen values of B are same as that of A. Also find the relation between the eigen vectors of B and eigen vectors of A. 10

(ii) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Using this, show that A is non-singular and find A^{-1}. 10

(b) (i) Show that the subspaces of $\mathbb{R}^3$ spanned by two sets of vectors {(1, 1, –1), (1, 0, 1)} and {(1, 2, –3), (5, 2, 1)} are identical. Also find the dimension of this subspace. 10

www.examrace.com

(छ) दर्शाइए कि ऐसे गोलक का समीकरण, जो बिंदु (1, 2, –2) पर गोलक

$$4(x^2 + y^2 + z^2) + 10x - 25y - 2z = 0$$

का स्पर्श करता हो और बिंदु (–1, 0, 0) के बीच से गुजरता हो,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0$$ होगा। 10

2. (क) (i) लीजिए $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ एक $n \times n$ वर्ग आव्यूह A के आइगन मान, जिनके संगत आइगन सदिश $X_1, X_2, ..., X_n$ हों। यदि B एक आव्यूह हो A के समान, तो दर्शाइए कि B के आइगन मान A के आइगन मानों के बराबर हैं। इसके साथ ही B के आइगन सदिशों और A के आइगन सदिशों के बीच संबंध ा मालूम कीजिए। 10

(ii) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए। इसका इस्तेमाल करते हुए दर्शाइए कि A व्युत्क्रमणीय है और A^{-1} मालूम कीजिए। 10

(ख) (i) दर्शाइए कि सदिशों के दो सैटों {(1, 1, –1), (1, 0, 1)} और {(1, 2, –3), (5, 2, 1)} के आर-पार विस्तृत $\mathbb{R}^3$ की उपसमष्टियां सर्वसम हैं। इसके साथ ही इस उपसमष्टि का विस्तार मालूम कीजिए।

10

www.examrace.com

(ii) Find the nullity and a basis of the null space of the linear transformation $A : R^{(4)} \to R^{(4)}$ given by the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$ 10

(c) (i) Show that the vectors (1, 1, 1), (2, 1, 2) and (1, 2, 3) are linearly independent in $R^{(3)}$. Let $T : \mathbb{R}^{(3)} \to \mathbb{R}^{(3)}$ be a linear transformation defined by

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z,\ x + 2y + 5z,\ 2x + 4y + 6z).$$

Show that the images of above vectors under T are linearly dependent. Give the reason for the same. 10

(ii) Let $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ and C be a non-singular matrix of order 3×3. Find the eigen values of the matrix B^3 where $B = C^{-1} AC$. 10

www.examrade.com

(ii) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

के द्वारा दत्त रैखिक रूपांतरण $A : R^{(4)} \to R^{(4)}$ की 'शून्यता' और 'शून्य समष्टि' का एक आधार मालूम कीजिए। 10

(ग) (i) दर्शाइए कि $R^{(3)}$ में सदिश (1, 1, 1), (2, 1, 2) और (1, 2, 3) रैखिकत: स्वतंत्र हैं। लीजिए कि $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + 2y + 5z, 2x + 4y + 6z)$ के द्वारा परिभाषित $T : \mathbb{R}^{(3)} \to \mathbb{R}^{(3)}$ एक रैखिक रूपांतरण है।

दर्शाइए कि T के अधीन उपरोक्त सदिशों के प्रतिबिंब रैखिकत: आश्रित हैं। ऐसा होने के कारण प्रस्तुत कीजिए। 10

(ii) लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ और C कोटि 3×3 का एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। आव्यूह B^3 के आइगन मान मालूम कीजिए, जहाँ $B = C^{-1} AC$। 10

www.examrace.com

3. (a) Evaluate :

(i) $\lim_{x \to 2} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \pi \quad , & x = 2 \end{cases}$

(ii) $\int_0^1 \ell n\, x\, dx$. (8, 12)

(b) Find the points on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ that are closest to and farthest from the point (3, 1, –1). 20

(c) Find the volume of the solid that lies under the paraboloid $z = x^2 + y^2$ above the xy-plane and inside the cylinder $x^2 + y^2 = 2x$. 20

4. (a) Three points P, Q, R are taken on the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ so that the lines joining P, Q, R to the origin are mutually perpendicular. Prove that the plane PQR touches a fixed sphere. 20

(b) Show that the cone $yz + zx + xy = 0$ cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ in two equal circles, and find their area. 20

(Contd.)

www.examrace.com

3. (क) मूल्यांकन कीजिए :

(i) $\lim_{x\to 2} f(x)$, जहाँ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2 \\ \pi, & x=2 \end{cases}$

(ii) $\int_0^1 \ell n\, x\, dx$. (8, 12)

(ख) गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ पर ऐसे बिंदु मालूम कीजिए, जो बिंदु (3, 1, –1) के सबसे पास और सबसे दूर हों। 20

(ग) ऐसे ठोस का आयतन मालूम कीजिए, जो परवलयज $z = x^2 + y^2$ के नीचे, xy-समतल के ऊपर और सिलिंडर $x^2 + y^2 = 2x$ के अंदर स्थित हो। 20

4. (क) तीन बिंदु P, Q, R दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ पर इस प्रकार लिए जाते हैं कि P, Q, R को उद्गम से जोड़ने वाली रेखाएं परस्पर लंब हों। सिद्ध कीजिए कि समतल PQR एक नियत गोलक को स्पर्श करता है। 20

(ख) दर्शाइए कि शंकु $yz + zx + xy = 0$ गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ को दो बराबर के वृत्तों में काटता है, और उनका क्षेत्रफल भी मालूम कीजिए। 20

www.examrace.com

(c) Show that the generators through any one of the ends of an equiconjugate diameter of the principal elliptic section of the hyperboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ are inclined to each other at an angle of 60° if $a^2 + b^2 = 6c^2$. Find also the condition for the generators to be perpendicular to each other. 20

SECTION—B

5. (a) Obtain the solution of the ordinary differential equation $\frac{dy}{dx}=(4x+y+1)^2$,

if $y(0) = 1$. 10

(b) Determine the orthogonal trajectory of a family of curves represented by the polar equation

$$r = a(1 - \cos\theta),$$

(r, θ) being the plane polar coordinates of any point. 10

(c) The velocity of a train increases from 0 to v at a constant acceleration f_1, then remains constant for an interval and again decreases to 0 at a constant retardation f_2. If the total distance described is x, find the total time taken. 10

(Contd.)

www.examrace.com

(ग) दर्शाइए कि अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ के मुख्य दीर्घवृत्तीय परिच्छेद के एक समसंयुग्मी व्यास के सिरों में से किसी एक के बीच से, जनक एक दूसरे पर 60° के कोण पर आनत होते हैं यदि $a^2 + b^2 = 6c^2$। इसके साथ ही जनकों के एक दूसरे पर लंब होने की दशा मालूम कीजिए। 20

खण्ड—'ख'

5. (क) निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरण का हल प्राप्त कीजिए :

$$\frac{dy}{dx}=(4x+y+1)^2,$$

यदि $y(0) = 1$ 10

(ख) ध्रुवीय समीकरण

$$r = a(1 - \cos\theta)$$

के द्वारा व्यंजित वक्र-कुल के लांबिक प्रक्षेप-पथ का निर्धारण कीजिए,

(r, θ) किसी भी बिंदु के समतल ध्रुवीय निर्देशांक हैं। 10

(ग) एक रेलगाड़ी का वेग अपरिवर्ती त्वरण f_1 के साथ 0 से v तक बढ़ता है, उसके बाद एक अंतराल के लिए अपरिवर्ती बना रहता है और फिर अपरिवर्ती मंदन f_2 के साथ कम होते-होते 0 पहुँच जाता है। यदि तय की कुल दूरी x हो, तो कुल लिया समय मालूम कीजिए। 10

www.examrace.com

(d) A projectile aimed at a mark which is in the horizontal plane through the point of projection, falls x meter short of it when the angle of projection is α and goes y meter beyond when the angle of projection is β. If the velocity of projection is assumed same in all cases, find the correct angle of projection.

10

(e) For two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ given respectively by

$$\vec{a} = 5t^2\hat{i} + t\,\hat{j} - t^3\hat{k}$$

and $\vec{b} = \sin t\,\hat{i} - \cos t\,\hat{j}$

determine :

(i) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

and (ii) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. 10

(f) If u and v are two scalar fields and $\vec{f}$ is a vector field, such that

$$u\,\vec{f} = \text{grad } v,$$

find the value of

$\vec{f}\cdot\text{curl }\vec{f}$ 10

www.examrace.com

(घ) एक ऐसे निशाने को लक्ष्यित, जो प्रक्षेपण के बिंदु के बीच से क्षैतिज समतल में हो, एक प्रक्षेपक, जब प्रक्षेपण कोण α होता है तब निशाने से x मीटर पहले गिरता है और जब प्रक्षेपण कोण β होता है, तब निशाने को पार कर y मीटर आगे जा गिरता है। यदि सभी मामलों में प्रक्षेपण के वेग को वही मान लिया जाय, तो प्रक्षेपण का सही कोण मालूम कीजिए। 10

(च) $\vec{a} = 5t^2\hat{i} + t\,\hat{j} - t^3\hat{k}$

और $\vec{b} = \sin t\,\hat{i} - \cos t\,\hat{j}$

के द्वारा दत्त दो सदिशों क्रमश: $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए निर्धारण कीजिए :

(i) $\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

और (ii) $\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. 10

(छ) यदि u और v दो अदिश क्षेत्र हों और $\vec{f}$ एक सदिश क्षेत्र हो, इस प्रकार कि

$$u\,\vec{f} = \text{grad } v,$$

तो $\vec{f}\cdot\text{curl }\vec{f}$ का मान मालूम कीजिए। 10

www.examrace.com

6. (a) Obtain Clairaut's form of the differential equation

$$\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\left(y\frac{dy}{dx}+x\right)=a^2\frac{dy}{dx}.$$

Also find its general solution. 15

(b) Obtain the general solution of the second order ordinary differential equation

$$y''-2y'+2y=x+e^x\cos x,$$

where dashes denote derivatives w.r. to x. 15

(c) Using the method of variation of parameters, solve the second order differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\tan 2x.$$

15

(d) Use Laplace transform method to solve the following initial value problem :

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+x=e^t,\ x(0)=2 \text{ and } \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-1.$$

15

www.examrace.com

6. (क) अवकल समीकरण

$$\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\left(y\frac{dy}{dx}+x\right)=a^2\frac{dy}{dx}$$

के क्लेरो रूप को प्राप्त कीजिए। साथ ही इसके व्यापक हल को भी मालूम कीजिए। 15

(ख) द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

$$y'' - 2y' + 2y = x + e^x \cos x,$$

जहाँ 'डैश' x के सापेक्ष व्युत्पन्नों का द्योतन करते हैं, का व्यापक हल प्राप्त कीजिए। 15

(ग) प्राचल विचरणों की विधि का इस्तेमाल करते हुए, द्वितीय कोटि अवकल समीकरण

$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\tan 2x$ को हल कीजिए। 15

(घ) निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या को हल करने के लिए, लाप्लास रूपांतर विधि का इस्तेमाल कीजिए :

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+x=e^t, x(0)=2 \text{ और } \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-1.$$

15

(Contd.)

www.examrace.com

7. (a) A mass of 560 kg. moving with a velocity of 240 m/sec strikes a fixed target and is brought to rest in $\frac{1}{100}$ sec. Find the impulse of the blow on the target and assuming the resistance to be uniform throughout the time taken by the body in coming to rest, find the distance through which it penetrates. 20

(b) A ladder of weight W rests with one end against a smooth vertical wall and the other end rests on a smooth floor. If the inclination of the ladder to the horizon is 60°, find the horizontal force that must be applied to the lower end to prevent the ladder from slipping down. 20

(c) (i) After a ball has been falling under gravity for 5 seconds it passes through a pane of glass and loses half its velocity. If it now reaches the ground in 1 second, find the height of glass above the ground. 10

(ii) A particle of mass m moves on straight line under an attractive force mn^2x towards a point O on the line, where x is the distance from O. If $x = a$ and $\frac{dx}{dt} = u$ when $t = 0$, find $x(t)$ for any time $t > 0$. 10

www.examrace.com

7. (क) 240 m/sec के वेग के साथ गतिमान, 560 kg की एक संहति, एक स्थिर निशाने से जा टकराती है और $\frac{1}{100}$ sec में विरामावस्था पर पहुंच जाती है। निशाने पर आघात के आवेग को मालूम कीजिए और ऐसा करने में पिंड के द्वारा विरामावस्था तक पहुंचने में लगने वाले सारे समय में प्रतिरोध को एकसमान मानिए। मालूम कीजिए कि कितनी दूरी तक वह संहति वेधन करती है। 20

(ख) W भार की एक सीढ़ी का एक सिरा चिक्कंण ऊर्ध्वाधर दीवार से टिका है, जबकि दूसरा सिरा चिकने फर्श पर टिका है। यदि सीढ़ी की क्षितिज पर आनति 60° हो, तो मालूम कीजिए कि सीढ़ी के निचले सिरे को फिसल कर गिर जाने से रोकने के लिए कितने क्षैतिज बल को लगाना आवश्यक होगा।20

(ग) (i) एक गेंद के गुरुत्व के अधीन 5 सैकिंड तक गिरते रहने के बाद वह एक कांचफलक में से गुजरती है और आधे वेग को गंवा देती है। यदि अब वह भूमि पर 1 सैकिंड में पहुंच जाती है तो, कांचफलक की भूमि से ऊंचाई मालूम कीजिए। 10

(ii) द्रव्यमान m का एक कण, एक बिंदु O की ओर एक ऋजु रेखा पर mn^2x आकर्षी बल के अधीन गति करता है, जहाँ x दूरी है O से। यदि $x = a$ और $\frac{dx}{dt} = u$, जब $t = 0$, तो किसी भी समय $t > 0$ के लिए $x(t)$ मालूम कीजिए। 10

www.examrace.com

8. (a) Examine whether the vectors ∇u, ∇v and ∇w are coplanar, where u, v and w are the scalar functions defined by :

$$u = x + y + z,$$

$$v = x^2 + y^2 + z^2$$

and $w = yz + zx + xy.$ 15

(b) If $\bar{u} = 4y\hat{i} + x\hat{j} + 2z\hat{k}$, calculate the double integral

$$\iint (\nabla \times \bar{u}) \cdot d\bar{s}$$

over the hemisphere given by

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$$ 15

(c) If $\bar{r}$ be the position vector of a point, find the value(s) of n for which the vector

$$r^n \, \bar{r}$$

is (i) irrotational, (ii) solenoidal. 15

(d) Verify Gauss' Divergence Theorem for the vector

$$\bar{v} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$$

taken over the cube

$$0 \leq x, y, z \leq 1.$$ 15

www.examrace.com

8. (क) परीक्षण कीजिए कि क्या सदिश ∇u, ∇v और ∇w समतलीय है, जहाँ u, v और w

$$u = x + y + z,$$

$$v = x^2 + y^2 + z^2$$

के द्वारा परिभाषित अदिश फलन हैं

और $w = yz + zx + xy$. 15

(ख) यदि $\vec{u} = 4y\hat{i} + x\hat{j} + 2z\hat{k}$, तो द्विशः समाकल

$$\iint (\nabla \times \vec{u}) \cdot d\vec{s}$$

का

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

के द्वारा दत्त गोलार्ध पर परिकलन कीजिए। 15

(ग) यदि $\vec{r}$ एक बिंदु का स्थिति सदिश हो, तो n के मान (मानों) को मालूम कीजिए, जिसके लिए सदिश

$$r^n \; \vec{r}$$

(i) अघूर्णी, (ii) परिनालिकीय है। 15

(घ) घनाकृति

$$0 \leq x, y, z \leq 1$$

को अधीनीकृत किए हुए सदिश

$$\vec{v} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$$

के लिए गाउस अपसरण प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 15

www.examrace.com

Serial No.

C–DTN–L–NUA

गणित

प्रश्न-पत्र—I

समय : तीन घण्टे

पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न के लिए नियत अंक प्रश्न के अंत में दिए गए हैं।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीक/संकेत प्रचलित अर्थों में प्रयुक्त हैं, अन्यथा निर्दिष्ट हैं।

Note : *English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.*

www.examrace.com

C. S. (Main) Exam : 2011

Serial No. **C–DTN–L–NUB**

MATHEMATICS

Paper—II

Time Allowed : Three Hours | *Maximum Marks : 300*

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

Candidates should attempt Question Nos. 1 and 5 which are compulsory, and any ***three*** *of the remaining questions selecting at least* ***one*** *question from each Section.*

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols and notations carry usual meaning, unless otherwise indicated.

All questions carry equal marks.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

www.examrace.com

SECTION—A

1. (a) Show that the set

$$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$$

of six transformations on the set of Complex numbers defined by

$f_1(z) = z$, $f_2(z) = 1 - z$

$f_3(z) = \frac{z}{(z-1)}$, $f_4(z) = \frac{1}{z}$

$f_5(z) = \frac{1}{(1-z)}$ and $f_6(z) = \frac{(z-1)}{z}$

is a non-abelian group of order 6 w.r.t. composition of mappings. 12

(b) Let $S = (0, 1]$ and f be defined by $f(x) = \frac{1}{x}$ where $0 < x \le 1$ (in $\mathbb{R}$). Is f uniformly continuous on S ? Justify your answer. 12

(c) If $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$ and $u - v = \frac{e^y - \cos x + \sin x}{\cos hy - \cos x}$, find f(z) subject to the condition, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3-i}{2}$. 12

(Contd.)

www.examrace.com

खण्ड—क

1. (क) सिद्ध कीजिए कि सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय पर

$$f_1(z) = z,\ f_2(z) = 1 - z$$

$$f_3(z) = \frac{z}{(z-1)},\ f_4(z) = \frac{1}{z}$$

$$f_5(z) = \frac{1}{(1-z)} \text{ और } f_6(z) = \frac{(z-1)}{z}$$

से परिभाषित छः रूपांतरणों का समुच्चय

$$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$$

प्रतिचित्रण-संयोजन के सापेक्ष 6 कोटि का एक अन्-आबेली ग्रुप है। 12

(ख) माना कि $S = (0, 1]$ और f परिभाषित है $f(x) = \frac{1}{x}$ से जहां कि $0 < x \leq 1$ ($\mathbb{R}$ में)। क्या f S पर एकसमानतः संतत है ? अपने उत्तर का औचित्य बताइये। 12

(ग) यदि $f(z) = u + iv$ $z = x + iy$ का एक विश्लेषिक फलन है और $u - v = \frac{e^y - \cos x + \sin x}{\cos hy - \cos x}$, प्रतिबंध $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3-i}{2}$ के अधीन f(z) ज्ञात कीजिए। 12

www.examrace.com

(d) Solve by Simplex method, the following LP Problem :

Maximize, $Z = 5x_1 + 3x_2$

Constraints, $3x_1 + 5x_2 \leq 15$

$5x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$ 12

(e) (i) Prove that a group of Prime order is abelian. 6

(ii) How many generators are there of the cyclic group $(G , \cdot)$ of order 8 ? 6

2. (a) Give an example of a group G in which every proper subgroup is cyclic but the group itself is not cyclic. 15

(b) Let $f_n(x) = nx(1 - x)^n$, $x \in [0, 1]$

Examine the uniform convergence of $\{f_n(x)\}$ on $[0, 1]$. 15

(c) If the function f(z) is analytic and one valued in $| z - a | < R$, prove that for $0 < r < R$,

$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta} \, d\theta$, where $P(\theta)$ is the real part of $f(a + re^{i\theta})$. 15

(d) Find the shortest distance from the origin (0, 0) to the hyperbola

$$x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$$ 15

www.examrace.com

(घ) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्राम समस्या :

Maximize, $Z = 5x_1 + 3x_2$

Constraints, $3x_1 + 5x_2 \le 15$

$5x_1 + 2x_2 \le 10$

$x_1, x_2 \ge 0$

को एकधा विधि से हल कीजिए। 12

(ङ) (i) सिद्ध कीजिए कि अभाज्य कोटि का एक ग्रुप आबेली होता है। 6

(ii) 8 कोटि के चक्रीय समूह $(G, \cdot)$ के कितने जनक होते हैं ? 6

2. (क) एक समूह G का उदाहरण दीजिए जिसमें हरेक उचित उपसमूह चक्रीय होता है परन्तु समूह स्वयं चक्रीय नहीं है। 15

(ख) माना कि $f_n(x) = nx(1-x)^n, x \in [0, 1]$.

[0, 1] पर $\{f_n(x)\}$ के एकसमान अभिसरण की जांच कीजिए। 15

(ग) यदि फलन f(z) $|z - a| < R$ में विश्लेषिक और एक मान वाला है, तो सिद्ध कीजिए कि $0 < r < R$ के लिए

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta} \, d\theta,$$

जहां कि $P(\theta)$ $f(a + re^{i\theta})$ का वास्तविक भाग है। 15

(घ) मूलबिन्दु (0, 0) से अतिपरवलय

$$x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$$

तक लघुतम दूरी ज्ञात कीजिए। 15

www.examrace.com

3. (a) Let F be the set of all real valued continuous functions defined on the closed interval [0, 1]. Prove that (F, +, ·) is a Commutative Ring with unity with respect to addition and multiplication of functions defined pointwise as below :

$$\left.\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \text{and} \quad (f \,.\, g)(x) &= f(x) \,.\, g(x) \end{aligned}\right\} x \in [0, 1]$$

where f, g ∈ F. 15

(b) Show that the series for which the sum of first n terms

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \ 0 \le x \le 1$$

cannot be differentiated term-by-term at x = 0. What happens at $x \neq 0$? 15

(c) Evaluate by Contour integration,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$$ 15

(d) Find the Laurent series for the function

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2}, \text{ with centre } z = 1.$$ 15

4. (a) Let a and b be elements of a group, with $a^2 = e$, $b^6 = e$ and $ab = b^4a$.

Find the order of ab, and express its inverse in each of the forms a^mb^n and b^ma^n. 20

www.examrace.com

3. (क) माना कि F बंद अंतराल [0, 1] पर परिभाषित सभी वास्तविक मान संतत फलनों का समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि (F, +, ·) :

$$\left.\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \text{और} \quad (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \end{aligned}\right\} x \in [0, 1]$$

जहां कि $f, g \in F$

की तरह बिन्दुश: परिभाषित फलनों के योग और गुणन के सापेक्ष एक के साथ एक क्रमविनिमेय वलय होता है। 15

(ख) सिद्ध कीजिए कि ऐसी श्रेणी का जिसके लिए प्रथम n पदों का योगफल

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \; 0 \le x \le 1$$

$x = 0$ पर पदश: अवकलन नहीं किया जा सकता है। $x \neq 0$ पर क्या होता है ? 15

(ग) कन्टूर समाकलन से

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$$

का मान निकालिए। 15

(घ) केन्द्र $z = 1$ वाले फलन

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2}$$

के लिए लौराँ श्रेणी ज्ञात कीजिए। 15

4. (क) माना कि a और b एक समूह के, $a^2 = e$, $b^6 = e$ और $ab = b^4a$ के साथ, अवयव हैं।

ab की कोटि ज्ञात कीजिए, और इसके प्रतिलोम को हरेक रूप $a^m b^n$ और $b^m a^n$ में व्यक्त कीजिए। 20

(Contd.)

www.examrace.com

(b) Show that if $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$, then its derivative

$$S'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+nx^2)^2}, \text{ for all } x. \quad 20$$

(c) Write down the dual of the following LP problem and hence solve it by graphical method :

Minimize, $Z = 6x_1 + 4x_2$

Constraints, $2x_1 + x_2 \geq 1$

$3x_1 + 4x_2 \geq 1{\cdot}5$

$x_1, x_2 \geq 0$ 20

SECTION—B

5. (a) Solve the PDE

$$(D^2 - D'^2 + D + 3D' - 2)\, z = e^{(x-y)} - x^2 y$$

12

(b) Solve the PDE

$$(x + 2z)\frac{\partial z}{\partial x} + (4zx - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + y$$

12

(c) Calculate $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$ (upto 3 places of decimal) by dividing the range into 8 equal parts by Simpson's $\frac{1}{3}$rd Rule. 12

(Contd.)

www.examrace.com

(ख) सिद्ध कीजिए कि यदि

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2},$$

तो इसका अवकलज

$$S'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (1 + nx^2)^2},$$ सभी x के लिए। 20

(ग) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या का द्वैती लिखिए और अतः ग्राफी विधि से इसका हल निकालिए :

Minimize, $Z = 6x_1 + 4x_2$

Constraints, $2x_1 + x_2 \geq 1$

$3x_1 + 4x_2 \geq 1 \cdot 5$

$x_1, x_2 \geq 0$ 20

खण्ड—ख

5. (क) आंशिक अवकल समीकरण (PDE)

$$(D^2 - D'^2 + D + 3D' - 2)\, z = e^{(x-y)} - x^2 y$$

को हल कीजिए। 12

(ख) आंशिक अवकल समीकरण (PDE)

$$(x + 2z)\frac{\partial z}{\partial x} + (4zx - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + y$$

को हल कीजिए। 12

(ग) परास को 8 समान भागों में विभाजित करके सिम्प्सन के तिहाई नियम से $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$ का दशमलव के 3 स्थानों तक परिकलन कीजिए। 12

www.examrace.com

(d) (i) Compute $(3205)_{10}$ to the base 8.

(ii) Let A be an arbitrary but fixed Boolean algebra with operations $\wedge$, $\vee$ and $'$ and the zero and the unit element denoted by 0 and 1 respectively. Let x, y, z, ... be elements of A.

If $x, y \in A$ be such that $x \wedge y = 0$ and $x \vee y = 1$ then prove that $y = x'$. 12

(e) Let a be the radius of the base of a right circular cone of height h and mass M. Find the moment of inertia of that right circular cone about a line through the vertex perpendicular to the axis.

12

6. (a) Find the surface satisfying $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2$ and touching $z = x^3 + y^3$ along its section by the plane $x + y + 1 = 0$. 20

(b) Solve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \; 0 \leq y \leq b$$

satisfying the boundary conditions

$$u(0, y) = 0, \; u(x, 0) = 0, \; u(x, b) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = T \sin^3 \frac{\pi y}{a}.$$

20

(Contd.)

www.examrace.com

(घ) (i) $(3205)_{10}$ का आधार 8 से अभिकलन कीजिए।

(ii) माना कि A, प्राचलनों $\wedge$, $\vee$ और ' के साथ और शून्य तथा तत्समक अवयव क्रमशः द्योतित 0 और 1 से, एक स्वेच्छ परन्तु नियत बूलीय बीजावली है। माना कि x, y, z, ... A के अवयव हैं। यदि $x, y \in A$ ऐसे हों कि $x \wedge y = 0$ और $x \vee y = 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $y = x'$ । 12

(ङ) माना कि a ऊंचाई h और द्रव्यमान M वाले एक लम्ब-वृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या है। अक्ष से लम्ब शीर्ष से होती हुई एक रेखा के इर्द-गिर्द उस लम्बवृत्तीय शंकु का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए। 12

6. (क) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2$ का पालन करते हुए और तल $x + y + 1 = 0$ द्वारा इसके परिच्छेद के साथ-साथ $z = x^3 + y^3$ को स्पर्श करते हुए बहिस्तल को ज्ञात कीजिए। 20

(ख) परिसीमा प्रतिबंधों

$$u(0, y) = 0, u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = T \sin^3 \frac{\pi y}{a}$$

का पालन करते हुए

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \le x \le a, 0 \le y \le b$$

को हल कीजिए। 20

www.examrace.com

(c) Obtain temperature distribution y(x, t) in a uniform bar of unit length whose one end is kept at 10°C and the other end is insulated. Also it is given that $y(x, 0) = 1 - x, 0 < x < 1$. 20

7. (a) A solid of revolution is formed by rotating about the x-axis, the area between the x-axis, the line x = 0 and x = 1 and a curve through the points with the following co-ordinates :

x	·00	·25	·50	·75	1
y	1	·9896	·9589	·9089	·8415

Find the volume of the solid. 20

(b) Find the logic circuit that represents the following Boolean function. Find also an equivalent simpler circuit :

x	y	z	f(x, y, z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

20

(c) Draw a flow chart for Lagrange's interpolation formula. 20

(Contd.)

www.examrace.com

(ग) मात्रक लंबाई की एक एकसमान शलाका में, जिसका एक सिरा 10°C पर रखा है और दूसरा सिरा ऊष्मारोधी है, तापमान वितरण y(x, t) ज्ञात कीजिए। यह भी दिया हुआ है कि

$$y(x, 0) = 1 - x, \quad 0 < x < 1.$$ 20

7. (क) x-अक्ष; रेखा x = 0 और x = 1 और निम्नलिखित निर्देशांकों वाले बिन्दुओं से होते हुए वक्र के बीच क्षेत्र को x-अक्ष के प्रति घूर्णन करके एक परिक्रमण घनाकृति बनती है :

x	·00	·25	·50	·75	1
y	1	·9896	·9589	·9089	·8415

घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए। 20

(ख) तर्क परिपथ ज्ञात कीजिए जो कि निम्नलिखित बूलीय फलन को निरूपित करता है। एक तुल्य सरलतर परिपथ भी ज्ञात कीजिए :

x	y	z	f(x, y, z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

20

(ग) लग्रांजी अंतर्वेशन सूत्र के लिए एक प्रवाह-संचित्र खींचिए। 20

www.examrace.com

8. (a) The ends of a heavy rod of length 2a are rigidly attached to two light rings which can respectively slide on the thin smooth fixed horizontal and vertical wires O_x and O_y. The rod starts at an angle α to the horizon with an angular velocity $\sqrt{[3g(1-\sin\alpha)/2a]}$ and moves downwards. Show that it will strike the horizontal wire at the end of time

$$-2\sqrt{a/(3g)}\log\left[\tan\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)\cot\frac{\pi}{8}\right].$$ 30

(b) An infinite row of equidistant rectilinear vortices are at a distance a apart. The vortices are of the same numerical strength K but they are alternately of opposite signs. Find the Complex function that determines the velocity potential and the stream function. 30

www.examrace.com

8. (क) लम्बाई 2a की एक भारी छड़ के सिरे दो हलके छल्लों से दृढ़ता से जुड़े हैं जो कि क्रमश: पतले चिकने नियत क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर तारों O_x और O_y पर फिसल सकती है। छड़ कोणीय वेग $\sqrt{[3g(1-\sin\alpha)/2a]}$ से क्षितिज से कोण α पर आरंभ करती है और अधोमुखी चलती है। सिद्ध कीजिए कि यह समय

$$-2\sqrt{a/(3g)}\,\log\left[\tan\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)\cot\frac{\pi}{8}\right]$$

के अंत में क्षैतिज तार से टकराएगी। 30

(ख) दूरी a पर अलग-अलग समान्तराली रेखीय भ्रमिलों की एक अनंत पंक्ति है। भ्रमिल समान संख्यात्मक सामर्थ्य K के हैं परन्तु वे एकांतरत: विपरीत चिह्नों के हैं। सम्मिश्र फलन ज्ञात कीजिए जो वेग विभव और धारा फलन को निर्धारित करता है। 30

www.examrace.com

Serial No.

C–DTN–L–NUB

गणित

प्रश्न-पत्र—II

समय : तीन घण्टे

पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं दिये जाएंगे।

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

यदि आवश्यक हो तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीकों और संकेतनों के प्रचलित अर्थ हैं, जब तक अन्यथा न कहा गया हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : *English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.*

www.examrace.com